Лекции по Конформной Теории Поля

М. Лашкевич

ИТФ им. Л.Д. Ландау
2001

Лекция 1
Свободные безмассовые поля
в двумерном пространстве-времени

Рассмотрим свободное вещественное безмассовое бозонное поле в евклидовом пространстве с действием

$$S_E[\phi] = \int \frac{d^2x}{8\pi}\,(\partial_\mu\phi)^2 = \int \frac{d^2x}{2\pi}\,\partial\phi\,\bar\partial\phi = \int \frac{d\bar z\,dz}{4\pi i}\,\partial\phi\,\bar\partial\phi, \tag{1}$$

где использованы комплексные координаты $z = x^2 + ix^1$ и $\bar z = x^2 - ix^1$ и соответствующие операторы дифференцирования $\partial = \frac12(\partial_2 - i\partial_1)$ и $\bar\partial = \frac12(\partial_2 + i\partial_1)$. При переходе к пространству Минковского эти координаты переходят в координаты светового конуса $x_+ = iz = x^0 + x^1$, $x_- = i\bar z = x^0 - x^1$. Решение классических уравнений движения

$$\partial\bar\partial\phi = 0$$

имеет вид

$$\phi(x) = \varphi(z) + \overline{\varphi(z)} = \varphi(z) + \bar\varphi(\bar z). \tag{2}$$

Здесь $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая функция.

Легко вычислить тензор энергии-импульса по формуле

$$T^\nu_\mu = L\delta^\nu_\mu - \phi_{,\mu}\frac{\partial L}{\partial\phi_{,\nu}}.$$

В голоморфных координатах

$$T_{z\bar z} = T_{\bar z z} = 0, \qquad T_{zz} = \frac{1}{i\pi}\,T(z), \qquad T_{\bar z\bar z} = \frac{1}{i\pi}\,\bar T(\bar z), \tag{3}$$

где

$$T(z) = -\frac12(\partial\phi)^2, \qquad \bar T(\bar z) = -\frac12(\bar\partial\phi)^2. \tag{4}$$

При этом, скажем,

$$P_z = \tfrac12 P^{\bar z} = \int \frac{dz}{2\pi i}\,T(z).$$

Перейдем к квантованию. Действие можно переписать в виде

$$S_E = \frac12(\phi, K\phi), \qquad (a,b) = \int d^2x\,a(x)b(x), \qquad K = -\frac{1}{4\pi}\nabla^2 = -\frac{1}{\pi}\partial\bar\partial.$$

Обратный оператор к K представляет собой (евклидов) пропагатор бозона:

$$KG_E(x) = \delta(x). \tag{5}$$

Заметим, что

$$\bar\partial\frac1z = \partial\frac1{\bar z} = \pi\delta(x). \tag{6}$$

Действительно, имеем

$$\int_{|x|\le R} d^2x\,\bar\partial\frac1z = \int_{|x|\le R} d^2x\,\nabla\left(\frac{1}{2z},\frac{i}{2z}\right) = \int dl\,\mathbf n\left(\frac{1}{2z},\frac{i}{2z}\right) = \int_0^{2\pi} d\vartheta\,r\frac{\cos\vartheta + i\sin\vartheta}{2re^{i\vartheta}} = \frac12\int_0^{2\pi} d\vartheta = \pi.$$

Вне точки $x = 0$ решение уравнения (4) должно иметь вид (2). Будем искать центрально-симметричное решение, т. е. зависящее только от $|z|^2 = z\bar z$. Отсюда видно, что $\varphi(z) \sim \log z$:

$$\partial\bar\partial\log z\bar z = \partial\bar\partial(\log z + \log\bar z) = \partial\frac1{\bar z} = \pi\delta(x).$$

Здесь важно, что нельзя переставлять ∂ и $\bar\partial$. Для проверки сделаем вычисление полностью в полярных координатах:

$$\int d^2x\,\partial\bar\partial\log|z|^2=\frac{1}{4}\int d^2x\,\nabla^2\log r^2=\frac{1}{4}\int d\mathbf{n}\cdot\nabla\log r^2$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}r\,d\vartheta\,\frac{\partial}{\partial r}\log r^2=\pi.$$

Окончательно получаем

$$G_E(x)\equiv\langle\phi(x)\phi(0)\rangle=\log\frac{R^2}{z\bar z},\tag{7}$$

где R — произвольная константа размерности длины. Фиксировать эту константу на плоскости, строго говоря, нельзя. Однако если мы будем рассматривать теорию на области конечного размера l с данными граничными условиями, то при $|x|\ll l$ корреляционные функции будут даваться формулой (4) с $R\sim l$. Кроме того, корреляционные функции производных от ϕ определены однозначно. Есть и другой класс полей с однозначно определенной корреляционной функцией.

Остальные корреляционные функции можно найти по теореме Вика. По обычным правилам вводится символ нормального произведения. В частности, тензор энергии импульса следует определять как

$$T(z)=-\frac{1}{2}{:}(\partial\phi)^2{:},\qquad\bar T(\bar z)=-\frac{1}{2}{:}(\bar\partial\phi)^2{:}.\tag{7}$$

Рассмотрим произведение $T(z')T(z)$ и приведем его к нормальному виду:

$$\begin{aligned}T(z')T(z)&=\frac{1}{4}{:}\partial\phi(z')\partial\phi(z'){:}{:}\partial\phi(z)\partial\phi(z){:}\\&=\frac{1}{4}{:}(\partial\phi(z'))^2(\partial\phi(z))^2{:}+\langle\partial\phi(z')\partial\phi(z)\rangle{:}\partial\phi(z')\partial\phi(z){:}+\frac{1}{2}\langle\partial\phi(z')\partial\phi(z)\rangle^2\\&=\frac{1}{4}{:}(\partial\phi(z'))^2(\partial\phi(z))^2{:}-\frac{1}{(z'-z)^2}{:}\partial\phi(z')\partial\phi(z){:}+\frac{1}{2(z'-z)^4}.\end{aligned}$$

Разлагая второй член в ряд Тейлора по $(z'-z)$, получаем

$$T(z')T(z)=\frac{1/2}{(z'-z)^4}+\frac{2T(z)}{(z'-z)^2}+\frac{\partial T(z)}{z'-z}+\cdots.\tag{8}$$

Здесь многоточие обозначает регулярные члены.

Теперь рассмотрим свободное майорановское фермионное поле:

$$S_E[\psi,\bar\psi]=\int\frac{d^2x}{2\pi}(\psi\bar\partial\psi-\bar\psi\partial\bar\psi).\tag{9}$$

Это действие можно получить следующим образом. Выберем γ-матрицы в пространстве Минковского в виде

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}&-i\\i&\end{pmatrix},\qquad\gamma^1=\begin{pmatrix}&i\\i&\end{pmatrix}.$$

Эти γ-матрицы — чисто мнимые и, следовательно, отвечают представлению Майораны. Это значит, что на фермионное двухкомпонентное поле Ψ можно наложить условие вещественности

$$\Psi^*(x)=\Psi(x).\tag{10}$$

Действительно, оператор $i\hat\partial=i\gamma^\mu\partial_\mu$ в этом случае чисто вещественный и стандартное действие $\int d^2x\,\bar\Psi\,i\hat\partial\Psi$ тоже вещественно (следует помнить, что фермионы антикоммутируют!). В координатах светового конуса это действие имеет вид

$$i\int d^2x\,(\psi_1\partial_-\psi_1+\psi_2\partial_+\psi_2).$$

Переходя к евклидову пространству ($iS_M = -S_E$, $x^2 = -ix^0$), получаем

$$\int d^2x\,(\psi_1\bar\partial\psi_1 + \psi_2\partial\psi_2).$$

Заметим, что

$$(\psi_1\bar\partial\psi_1)^* = (\partial\psi_1^*)\psi_1^* = -\psi_1^*\partial\psi_1^*,$$

так что условие Майораны (10) не согласуется с вещественностью евклидова действия и, следовательно, неверно в мнимом времени. С вещественным действием согласуется условие $\psi_1^* = i\psi_2$. Переобозначая $\psi \sim \psi_1$, $\bar\psi \sim i\psi_2$, получаем действие (9) с условием

$$\psi^*(x) = \bar\psi(x). \tag{11}$$

Решение классических уравнений движения

$$\bar\partial\psi = 0, \qquad \partial\bar\psi = 0 \tag{12}$$

имеет вид

$$\psi(x) = \psi(z), \qquad \bar\psi(x) = \overline{\psi(z)} = \bar\psi(\bar z). \tag{13}$$

Найдем теперь тензор энергии-импульса. По общей формуле находим

$$T^z_z = \frac{1}{4\pi i}\psi\bar\partial\psi, \qquad T^{\bar z}_{\bar z} = -\frac{1}{4\pi i}\bar\psi\partial\bar\psi, \qquad T^{\bar z}_z = -\frac{1}{4\pi i}\psi\partial\psi, \qquad T^z_{\bar z} = \frac{1}{4\pi i}\bar\psi\bar\partial\bar\psi.$$

На уравнениях движения $T^z_z = T^{\bar z}_{\bar z} = 0$, т. е. $T^\mu_\mu = 0$. Ненулевые компоненты тензора энергии импульса в обозначениях (3) равны[a]

$$T(z) = -\frac{1}{2}\psi\partial\psi, \qquad \bar T(\bar z) = \frac{1}{2}\bar\psi\bar\partial\bar\psi. \tag{14}$$

Теперь рассмотрим квантование. Очевидно, $K = \frac{1}{\pi}\bar\partial$ для поля ψ и $K = \frac{1}{\pi}\partial$ для поля $-\bar\psi$. Соответственно,

$$\langle\psi(z')\psi(z)\rangle = \frac{1}{z'-z}, \qquad \langle\bar\psi(z')\bar\psi(z)\rangle = -\frac{1}{\bar z'-\bar z}. \tag{15}$$

Тензор энергии импульса определяем через нормальное произведение:

$$T(z) = -\frac{1}{2}{:}\psi\partial\psi{:}, \qquad \bar T(\bar z) = \frac{1}{2}{:}\bar\psi\bar\partial\bar\psi{:}. \tag{16}$$

Аналогично бозонному случаю находим

$$T(z')T(z) = \frac{1/4}{(z'-z)^4} + \frac{2T(z)}{(z'-z)^2} + \frac{\partial T(z)}{z'-z} + \cdots. \tag{17}$$

Это выражение отличается от (8) коэффициентом $1/4$ в первом члене. В общем случае операторное произведение для компоненты тензора-энергии импульса имеет вид

$$T(z')T(z) = \frac{c/2}{(z'-z)^4} + \frac{2T(z)}{(z'-z)^2} + \frac{\partial T(z)}{z'-z} + \cdots. \tag{18}$$

Константа c называется *центральным зарядом* и характеризует теорию. В случае свободного бозона $c = 1$, а в случае фермиона $c = 1/2$.

[a] Можно ввести также майорано-вейлевские (киральные) фермионы, в действии которых которых отсутствует второе или первое слагаемое и, соответственно $\bar T = 0$ или $T = 0$.

Будем рассматривать картину радиального квантования. Именно, введем время τ и координату σ как

$$z = e^{\tau + i\sigma}, \qquad \bar{z} = e^{\tau - i\sigma}.$$

Это значит, что мы будет рассматривать теорию на цилиндре с образующей длины 2π, причем точка $z = 0$ соответствует бесконечному прошлому, а $z = \infty$ — бесконечному будущему. Масштабным преобразованием в координатах τ, σ мы всегда можем добиться произвольной длины образующей цилиндра.

Рассмотрим фурье-гармоники в этой картине:

$$L_n = \oint \frac{dz}{2\pi i}\, z^{n+1} T(z), \qquad T(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} L_n z^{-n-2}. \tag{19}$$

Давайте получим коммутационные соотношения для L_n. В принципе операторное разложение (18) некоммутативно только в точке $z' = z$ и уследить буквально за этой некоммутативностью довольно трудно. Лучше воспользоваться тем, что под произведением операторов мы понимаем *хронологическое* произведение. Благодаря этому мы можем считать, что в произведении

$$L_m L_n = \oint_{C_1} \frac{dz}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{dw}{2\pi i}\, T(z) T(w)$$

контур C_1 охватывает контур C_2 (находится в будущем по отношению к нему) и оба они охватывают 0. Тогда

$$[L_m, L_n] = \oint_{C_2} \frac{dw}{2\pi i} \oint_{C_w} \frac{dz}{2\pi i}\, T(z) T(w),$$

где C_w — маленький контур вокруг w. Подставляя сюда (18), беря интеграл по частям в третьем слагаемом и вычисляя вычет в точке $z = w$, получаем

$$[L_m, L_n] = (m - n) L_{m+n} + \frac{c}{12} m(m^2 - 1) \delta_{m+n,0}. \tag{20}$$

Алгебра Ли с образующими L_n, c и коммутационными соотношениями (20) называется *алгеброй Вирасоро*. Для компоненты $\bar{T}$ можно ввести свои генераторы $\bar{L}_n$, удовлетворяющие таким же коммутационным соотношениям.[b] Оператор $\bar{L}_0$ играет роль гамильтониана в картине, в которой роль времени играет «переменная светового конуса» $\log \bar{z} = \tau - i\sigma$. Тогда очевидно, что L_n коммутируют с гамильтонианом и являются интегралами движения. На классическом уровне можно сказать, что уравнение $\bar{\partial} z^{n+1} T(z) = 0$ означает, что $z^{n+1} T(z)$ является сохраняющимся током. Итак, мы получили систему с бесконечным числом интегралов движения.

Обсудим физический смысл полученных результатов. Прежде всего, мы рассматриваем случае, когда

$$T^{\mu}_{\mu} = 0$$

по крайней мере на уравнениях движения. Это условие означает наличие конформной инвариантности системы. Действительно, поскольку $T^{\mu\nu}$ пропорционален вариации действия по $g_{\mu\nu}$, нулевой след означает, что действие инвариантно при преобразованиях, при которых метрика умножается на скаляр, а это и есть конформные преобразования. В двумерном случае конформные преобразования представляют собой любые аналитические преобразования $z \to f(z)$, $\bar{z} \to \overline{f(z)}$ и $z \to \overline{f(z)}$, $\bar{z} \to f(z)$. Пространство этих преобразований бесконечномерно, так что следует ожидать, что алгебра Вирасоро отражает эту бесконечномерную симметрию. Среди преобразований этого типа важную роль играют дробно-линейные преобразования (преобразования Мебиуса)

$$z \to \frac{az + b}{cz + d}. \tag{21}$$

[b] Вообще говоря, центральные заряды c и $\bar{c}$ двух этих алгебр могут не совпадать, но для свободного бозона и свободного майорановского фермиона они совпадают.

Среди всех конформных преобразований эти преобразования выделены тем, что они взаимно-однозначны на сфере $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$. Эти преобразования образуют группу $SL(2,\mathbf{R})$. Действительно, преобразованию (21) можно сопоставить матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, причем композиции преобразований отвечает произведение матриц. Коэффициенты $a,\ldots,d$ можно нормировать условием $ad-bc=1$.

Группа Мебиуса порождается следующими элементами:

$$\begin{aligned} &\text{сдвиги:} && z\to z+b,\\ &\text{дилатации:} && z\to az,\\ &\text{инверсия:} && z\to 1/z. \end{aligned}$$

Рассмотрим бесконечно-малые преобразования

$$z\to z+\varepsilon_{-1},\qquad z\to z(1+\varepsilon_0),\qquad z^{-1}\to z^{-1}-\varepsilon_1.$$

Эти преобразования действуют на функции как $\delta g(z)=-\sum\varepsilon_n l_n g(z)$, причем

$$l_{-1}=-\partial,\qquad l_0=-z\partial,\qquad l_1=-z^2\partial.$$

Общим конформным преобразованиям

$$z\to z+\sum_{n\in\mathbf{Z}}\varepsilon_n z^{n+1}$$

отвечают операторы

$$l_n=-z^{n+1}\partial \tag{22}$$

с коммутационными соотношениями

$$[l_m,l_n]=(m-n)l_{m+n}. \tag{23}$$

Алгебра (23) отличается от алгебры Вирасоро дополнительным соотношением $c=0$. Обратите внимание, что подалгебра алгебры Вирасоро, порожденная L_0, $L_{\pm1}$ совпадает с подалгеброй, порожденной операторами l_0, $l_{\pm1}$, т. е. с алгеброй $sl(2,\mathbf{R})$. Это значит, что группа дробно-линейных преобразований остается симметрией теории и после квантования. Полная же алгебра конформных зарядов деформируется, но остается бесконечномерной.

Лекция 2
Вершинные операторы и операторные разложения

Мы уже говорили о том, что нам следует искать поля, корреляционные функции которых остаются конечными при стремящемся к бесконечности размере области R. В этой лекции мы рассмотрим класс таких полей.

Пусть Φ — произвольная линейная комбинация величин $\phi(x)$, взятых в разных точках. Тогда

$$\langle e^{\Phi}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\langle\Phi^{2n}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\binom{2n}{n}\frac{n!}{2^n}\langle\Phi^2\rangle^n = e^{\frac{1}{2}\langle\Phi^2\rangle}.$$

Мы хотим подставить $\Phi = i\sum\alpha_i\phi(x_i)$. Очевидно, что среднее $\langle\Phi^2\rangle$ будет содержать средние $\langle\phi^2(x_i)\rangle$, равные бесконечности. Давайте обрежем (4) на масштабе $r \ll R$ и положим

$$\langle\phi^2(x)\rangle = \log\frac{R^2}{r^2}.$$

Тогда

$$\langle e^{i\sum\alpha_i\phi(x_i)}\rangle = r^{\sum\alpha_i^2}R^{-\left(\sum\alpha_i\right)^2}\prod_{i<j}|x_i - x_j|^{2\alpha_i\alpha_j}. \tag{1}$$

Введем операторы

$$:e^{i\alpha\phi(x)}: = r^{-\alpha^2}e^{i\alpha\phi(x)}. \tag{2}$$

Эти операторы (*вершинные операторы*) и в самом деле представляют собой ряды $\sum\frac{1}{n!}:(i\alpha\phi)^n:$. Средние этих операторов не зависят от ультрафиолетового обрезания r. Второй множитель в (1) не может быть исключен изменением нормировки полей. Однако он стремится к нулю при $R\to\infty$, если $\sum\alpha_i\neq 0$.

Окончательно находим

$$\begin{aligned}\langle\prod_i :e^{i\alpha_i\phi(x_i)}:\rangle &= \prod_{i<j}|x_i - x_j|^{2\alpha_i\alpha_j}\quad \text{при }\sum_i\alpha_i = 0\text{ и}\\ &= 0\quad\text{в противном случае.}\end{aligned} \tag{3}$$

Множитель $\delta_{\sum\alpha_i,0}$ означает только то, что корреляционная функция равна нулю, если $\sum\alpha_i\neq 0$. Важное свойство этих корреляционных функций — голоморфная факторизуемость. Действительно, формально мы можем ввести поля $\varphi(z)$, $\bar\varphi(\bar z)$ с корреляционными функциями

$$\langle\varphi(z')\varphi(z)\rangle = \log\frac{R}{z'-z},\qquad \langle\bar\varphi(\bar z')\bar\varphi(\bar z)\rangle = \log\frac{R}{\bar z' - \bar z}.$$

Нетрудно проверить, что корреляционная функция

$$\begin{aligned}\langle :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}:\ldots:e^{i\alpha_N\varphi(z_N)}:\rangle &= \prod_{i<j}(z_i - z_j)^{\alpha_i\alpha_j}.\quad\text{при }\sum_i\alpha_i = 0\text{ и}\\ &= 0\quad\text{в противном случае.}\end{aligned} \tag{4}$$

Аналогично для $\bar\varphi(\bar z)$. Голоморфная факторизуемость означает в данном случае, что

$$\langle\prod_i :e^{i\alpha_i\phi(x_i)}:\rangle = \langle :e^{i\alpha_1\varphi(z_1)}:\ldots:e^{i\alpha_N\varphi(z_N)}:\rangle\langle :e^{i\alpha_1\bar\varphi(\bar z_1)}:\ldots:e^{i\alpha_N\bar\varphi(\bar z_N)}:\rangle. \tag{5}$$

Аналогичным свойством обладают более общие вершинные операторы

$$:(\partial^{k_1}\phi)^{l_1}\ldots(\partial^{k_m}\phi)^{l_m}(\bar\partial^{\bar k_1}\phi)^{\bar l_1}\ldots(\bar\partial^{\bar k_m}\phi)^{\bar l_m}e^{i\alpha\phi}:(x).$$

Вставка такого оператора в точку 0 породит состояние в бозонной теории. Чтобы описать это состояние более явно, разложим поле $\phi(x)$ по модам:

$$\phi(x) = Q - iP \log \frac{z\bar{z}}{R^2} - i \sum_{n\neq 0} \frac{a_n}{n} z^{-n} - i \sum_{n\neq 0} \frac{\bar{a}_n}{n} \bar{z}^{-n} \tag{6}$$

с ненулевыми коммутационными соотношениями

$$[P, Q] = -i, \qquad [a_m, a_n] = m\delta_{m+n,0}, \qquad [\bar{a}_m, \bar{a}_n] = m\delta_{m+n,0}. \tag{7}$$

Введем вакуум $|0\rangle$, такой что

$$P|0\rangle = 0, \qquad a_n|0\rangle = \bar{a}_n|0\rangle = 0 \quad (n > 0). \tag{8}$$

Легко проверить, что вакуумное среднее $\langle 0|\phi(x')\phi(x)|0\rangle$ совпадает с $\langle \phi(x')\phi(x)\rangle$, введенным в предыдущей лекции.

Введем собственное состояние импульса

$$|p\rangle = e^{ipQ}|0\rangle = \lim_{x\to 0} {:}e^{ip\phi(x)}{:}|0\rangle.$$

Тогда пространство состояний бозонного поля есть

$$\mathcal{H} = \bigoplus_p \mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_p = \bigoplus_p \mathbf{C}[a_{-1}, a_{-2}, \ldots; \bar{a}_{-1}, \bar{a}_{-2}, \ldots]|p\rangle. \tag{9}$$

Пространства $\mathcal{H}_p = \mathbf{C}[a_{-1}, a_{-2}, \ldots]|p\rangle$ называются *фоковскими пространствами.* Описанная конструкция является основой голоморфной факторизации в случае бозона. Очевидно, что

$$\varphi(z) = Q - iP \log \frac{z}{R} - i \sum_{n\neq 0} \frac{a_n}{n} z^{-n},$$
$$\bar{\varphi}(\bar{z}) = Q - iP \log \frac{\bar{z}}{R} - i \sum_{n\neq 0} \frac{\bar{z}^{-n}}{in} \bar{a}_n,$$

Эти два нелокальных поля имеют общую пару нулевых мод P, Q. Это отвечает тому что разложение классического поля $\phi(x) = \varphi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z})$ неоднозначно: оно инвариантно по отношению к прибавлению константы к φ и вычитанию той же константы к $\bar{\varphi}$.

Рассмотрим теперь операторное разложение тензора энергии-импульса с вершинным оператором:

$$\begin{aligned} T(z'){:}e^{i\alpha\phi(x)}{:} &= -\frac{1}{2}{:}(\partial\phi(x'))^2{:}{:}e^{i\alpha\phi(x)}{:} \\ &= -\frac{1}{2}{:}(\partial\phi(x'))^2 e^{i\alpha\phi(x)}{:} - i\alpha\langle\partial\phi(x')\phi(x)\rangle{:}\partial\phi(x')e^{i\alpha\phi(x)}{:} + \frac{\alpha^2}{2}\langle\partial\phi(x')\phi(x)\rangle^2{:}e^{i\alpha\phi(x)}{:}. \end{aligned}$$

Подставляя выражения для корреляционных функций и раскладывая нормальные произведения в ряд Тейлора по $x' - x$, получим

$$T(z'){:}e^{i\alpha\phi(x)}{:} = \frac{\frac{1}{2}\alpha^2{:}e^{i\alpha\phi(x)}{:}}{(z'-z)^2} + \frac{\partial{:}e^{i\alpha\phi(x)}{:}}{z'-z} + \cdots. \tag{10}$$

Чтобы понять смысл этого соотношения, рассмотрим поле $\Phi(x)$ с операторным разложением

$$\begin{aligned} T(z')\Phi(x) &= \frac{\Delta\Phi(x)}{(z'-z)^2} + \frac{\partial\Phi(x)}{z'-z} + \cdots, \\ \bar{T}(\bar{z}')\Phi(x) &= \frac{\bar{\Delta}\Phi(x)}{(\bar{z}'-\bar{z})^2} + \frac{\bar{\partial}\Phi(x)}{\bar{z}'-\bar{z}} + \cdots, \end{aligned} \tag{11}$$

Такое поле называют *первичным полем конформной размерности* $(\Delta, \bar{\Delta})$. Очевидно, что вершинные операторы представляют собой первичные поля конформной размерности $(\frac{1}{2}\alpha^2, \frac{1}{2}\alpha^2)$. Из соотношения (11) следуют коммутационные соотношения для L_n и $\Phi(x)$:

$$[L_n, \Phi(x)] = z^{n+1}\partial\Phi(x) + \Delta(n+1)z^n\Phi(x). \tag{12}$$

Так как L_n представляют собой генераторы конформных преобразований, имеем

$$\delta_{\varepsilon(z)}\Phi(x) = \varepsilon(z)\partial\Phi(x) + \Delta(\partial\varepsilon(z))\Phi(x).$$

Это соотношение легко интегрируется до конечных преобразований

$$\Phi(z, \bar{z}) \to (f'(z))^{\Delta}(\bar{f}'(\bar{z}))^{\bar{\Delta}}\Phi(f(z), \bar{f}(\bar{z})). \tag{13}$$

Строго говоря, корреляционные функции инвариантны относительно замены (13), только когда $f(z)$ — дробно-линейное преобразование. Конформная размерность описывает изменение поля при масштабных преобразованиях ($z \to \lambda z$) и поворотах ($z \to e^{i\vartheta}z$). Очевидно, что $d = \Delta + \bar{\Delta}$ — масштабная размерность поля, а $s = \Delta - \bar{\Delta}$ — спин. Конформная инвариантность накладывает жесткие условия на корреляционные функции первичных полей. Легко показать, что

$$\begin{aligned}
\langle\Phi_1(x')\Phi_2(x)\rangle &= 0, \text{ если } \Delta_1 \neq \Delta_2 \text{ или } \bar{\Delta}_1 \neq \bar{\Delta}_2,\\
\langle\Phi_1(x')\Phi_2(x)\rangle &= \frac{\text{const}}{(z'-z)^{2\Delta}(\bar{z}'-\bar{z})^{2\bar{\Delta}}}, \text{ если } \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta,\ \bar{\Delta}_1 = \bar{\Delta}_2 = \bar{\Delta},\\
\langle\Phi_3(x_3)\Phi_2(x_2)\Phi_1(x_1)\rangle &= \text{const}\prod(z_j - z_i)^{\Delta_k - \Delta_i - \Delta_j}(\bar{z}_j - \bar{z}_i)^{\bar{\Delta}_k - \bar{\Delta}_i - \bar{\Delta}_j},
\end{aligned} \tag{14}$$

где i, j, k — перестановка индексов 1, 2, 3. Кроме того, четырехточечная корреляционная функция $\langle\Phi_4(x_4)\Phi_4(x_3)\Phi_2(x_2)\Phi_1(x_1)\rangle$ выражается через функцию

$$G(z, \bar{z}) = \lim_{Z\to\infty} Z^{2\Delta_4}\bar{Z}^{2\bar{\Delta}_4}\langle\Phi_4(Z, \bar{Z})\Phi_3(1,1)\Phi_2(z,\bar{z})\Phi_1(0,0)\rangle, \qquad z = \frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}. \tag{15}$$

Пусть теперь $|0\rangle$ — состояние, определенное условием

$$L_n|0\rangle = \bar{L}_n|0\rangle = 0 \text{ при } n \geq 0. \tag{16}$$

Бозонный вакуум (8) удовлетворяет этому соотношению. Произведение $\Phi(0)|0\rangle$ дает состояние $|\Delta, \bar{\Delta}\rangle$, удовлетворяющее условию

$$\begin{gathered}
L_n|\Delta, \bar{\Delta}\rangle = \bar{L}_n|\Delta, \bar{\Delta}\rangle = 0 \quad (n > 0),\\
L_0|\Delta, \bar{\Delta}\rangle = \Delta|\Delta, \bar{\Delta}\rangle, \qquad \bar{L}_0|\Delta, \bar{\Delta}\rangle = \bar{\Delta}|\Delta, \bar{\Delta}\rangle.
\end{gathered}$$

Сосредоточимся на «голоморфном» секторе. Рассмотрим *модуль Верма* алгебры Вирасоро

$$M(\Delta) = \mathbf{C}[L_1, L_2, \ldots]|\Delta\rangle. \tag{17}$$

Вообще говоря, модуль Верма приводим. Пусть имеется вектор $|\chi\rangle$, такой что

$$L_n|\chi\rangle = 0 \quad (n > 0), \qquad L_0|\chi\rangle = (\Delta + N)|\chi\rangle, \quad N > 0, \tag{18}$$

называемый *нуль-вектором* или *особым вектором*. Нуль-вектор ортогонален всем состояниям модуля Верма. Действительно, если $|\varphi\rangle = L_{-n_1}\ldots L_{-n_k}|\Delta\rangle$, то

$$\langle\varphi|\chi\rangle = \langle\Delta|L_{n_k}\ldots L_{n_1}|\chi\rangle = 0.$$

Наличие нуль-вектора означает, что в модуле Верма имеется инвариантное подпространство, т. е. подпространство, которое само является представлением алгебры Вирасоро. Если профакторизовать алгебру Вирасоро по этому инвариантному подпространству (проще, говоря, если положить $|\chi\rangle = 0$), то снова получится представление алгебры Вирасоро. Неприводимое представление получается, если профакторизовать модуль Верма по всем инвариантным подпространствам, т. е. если положить все нуль-векторы равными нулю. Поскольку нуль-вектор ортогонален всем векторам в модуле Верма (в том числе и самому себе), то это естественно и с физической точки зрения.

Рассмотрим простейшие случаи. Пусть $N = 1$. Тогда $L_{-1}|\Delta\rangle$ — единственный возможный нуль-вектор. Очевидно,

$$L_1 L_{-1}|\Delta\rangle = 2L_0|\Delta\rangle = 2\Delta|\Delta\rangle.$$

Это равно нулю при $\Delta = 0$, т. е. такой нуль-вектор имеется только в вакуумном модуле. Введем операторы $\mathcal{L}_n$, действующие на операторы по правилу

$$(\mathcal{L}_n\Phi)(x) = \oint \frac{dw}{2\pi i}\, w^{n+1} T(w)\Phi(x).$$

Тогда

$$(\mathcal{L}_n\Phi)(0)|0\rangle = L_n\Phi(0)|0\rangle.$$

Пусть $\Phi_0(x)$ — первичный оператор, переводящий вирасоровский вакуумный вектор в вакуумный вектор. Тогда $0 = (\mathcal{L}_{-1}\Phi_0)(x) = [L_{-1}, \Phi_0(x)] = \partial\Phi_0(x)$. Это значит, что $\Phi_0(x)$ — постоянный оператор. Мы будем всегда считать, что имеется единственный вакуумный вектор и что $\Phi_0 = 1$.

Теперь пусть $N = 2$. В этом случае $|\chi\rangle = (aL_{-2} + bL_{-1}^2)|\Delta\rangle$. Следует проверить что $L_1|\chi\rangle = L_2|\chi\rangle = 0$.[a] Мы имеем

$$\begin{aligned} L_1(aL_{-2} + bL_{-1}^2)|\Delta\rangle &= (3a + 2(2\Delta+1)b)L_{-1}|\Delta\rangle, \\ L_2(aL_{-2} + bL_{-1}^2)|\Delta\rangle &= ((4 + \tfrac{c}{2})a + 6\Delta b)|\Delta\rangle. \end{aligned}$$

Отсюда получаем уравнения

$$\begin{aligned} 3a + 2(2\Delta+1)b &= 0, \\ \left(4a + \tfrac{c}{2}\right)a + 6\Delta b &= 0. \end{aligned}$$

Чтобы система имела нетривиальное решение, необходимо чтобы определитель ее коэффициентов равнялся нулю:

$$18\Delta - (2\Delta+1)(8a+c) = 0.$$

Решая эту систему относительно Δ, находим

$$\Delta = \tfrac{1}{16}\left(5 - c \pm \sqrt{(c-1)(c-25)}\right), \qquad |\chi\rangle = \left(L_{-2} - \frac{3}{2(2\Delta+1)}L_{-1}^2\right)|\Delta\rangle. \tag{19}$$

В случае бозонного поля $c = 1$ конформная размерность $\Delta = 1/4$. Имеется два таких поля $:e^{\pm\frac{i}{\sqrt{2}}\phi}:$, для которых нуль-векторы явно равны нулю.

Более интересен случай свободного фермиона $c = 1/2$. В этом случае

$$\Delta_1 = \tfrac{1}{2}, \qquad \Delta_2 = \tfrac{1}{16}.$$

Поля размерности 1/2 легко построить. Действительно, из корреляционной функции мы видим, что поле $\psi(z)$ имеет размерность $(1/2, 0)$, поле $\bar\psi(\bar z)$ — $(0, 1/2)$. Их произведение $\varepsilon(x) = \psi\bar\psi$ имеет размерность $(1/2, 1/2)$ и представляет собой множитель при массе в массивном случае. В контексте двумерных моделей статистической физики масса играет роль температурного параметра (отклонения температуры от критической), а оператор $\varepsilon(x)$ можно рассматривать как плотность энергии.

[a] Это следует проверять и в общем случае, так как все L_n возникают в коммутаторах L_1 и L_2.

Что же представляет собой поле размерности $\Delta = 1/16$? В следующей лекции мы увидим, что имеется два таких поля $\sigma(x)$ и $\mu(x)$ с операторными разложениями

$$\psi(z')\sigma(x) = (z'-z)^{-1/2}(\mu(x) + O(z'-z)),$$
$$\psi(z')\mu(x) = (z'-z)^{-1/2}(\sigma(x) + O(z'-z)).$$

Эти *спиновые операторы* не взаимно-локальны с ψ, $\bar\psi$ и друг с другом. При обходе, например, ψ вокруг σ по замкнутому контуру, набегает множитель -1. Это можно представлять собой так. Рассмотрим плоскость с выколотыми точками. Чтобы сделать область связной, проведем разрезы из выколотых точек до бесконечности. После построения решений уравнения Дирака в этой области следует сшить решения на берегах разрезов. Но фермионное поле определено с точностью до знака. Поэтому, чтобы иметь возможность правильно проквантовать задачу, следует рассмотреть решения как с условием $\psi_{\text{left}} = \psi_{\text{right}}$ на левом и правом берегу разреза, так и с условием $\psi_{\text{left}} = -\psi_{\text{right}}$. В первом случае решение можно аналитически продолжить на соответствующую выколотую точку, а во втором случае в выколотую точку можно посадить полулокальный оператор, который бы и обеспечивал требуемое условие сшивки.

Известно, что модель свободного майорановского фермиона представляет собой непрерывный предел модели Изинга в критической точке. Действительно, модель Изинга решается переходом к решеточным фермионным полям с квадратичным гамильтонианом. В непрерывном пределе вблизи критической точки это поле сводится к простому ротационно-инвариантному евклидову фермиону. Мы увидим, что спиновый оператор σ можно интерпретировать как «спиновую» переменную $\pm$ в узлах модели Изинга.

Лекция 3
Корреляционные функции в конформных моделях.

Рассмотрим конформную теорию с центральным зарядом $c < 1$ или $c > 25$. Пусть $\phi(x)$ — первичное поле размерности

$$\Delta = \tfrac{1}{16}\big(5 - c \pm \sqrt{(c-1)(c-25)}\big).$$

В этом случае имеется нулевой вектор

$$|\chi\rangle = \left(L_{-2} - \frac{3}{2(2\Delta+1)}L_{-1}^2\right)|\Delta\rangle.$$

Это значит, что поле $\phi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\mathcal{L}_{-2} - \frac{3}{2(2\Delta+1)}\mathcal{L}_{-1}^2\right)\phi(z) = 0. \tag{1}$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{-1}\phi(x) &= \oint \frac{dw}{2\pi i}\,T(w)\phi(z) = [L_{-1}, \phi(x)] = \partial\phi(x),\\
\mathcal{L}_{-1}^2\phi(x) &= \oint \frac{dw}{2\pi i}\,T(w)\partial\phi(z) = [L_{-1}, \partial\phi(x)] = \partial[L_{-1}, \phi(x)] = \partial^2\phi(x).
\end{aligned}$$

Несколько сложнее ситуация с $\mathcal{L}_{-2}$. В $\mathcal{L}_{-2}\phi$ дает вклад регулярная часть операторного разложения, так что это — новый оператор. Обойдем эту трудность следующим образом. Рассмотрим корреляционную функцию $\langle\mathcal{L}_{-2}\phi(x)\Phi_1(x_1)\ldots\Phi_N(x_N)\rangle$, где $\Phi_i(x_i)$ — первичные поля размерностей Δ_i, и попробуем утащить контур интегрирований на бесконечность, протаскивая его через полюсы второго порядка в точках x_i. С помощью операторных разложений для $T(w)\Phi(x_i)$ получим

$$\begin{aligned}
\langle\mathcal{L}_{-2}\phi(x)\Phi_1(x_1)\ldots\Phi_N(x_N)\rangle &= \oint \frac{dw}{2\pi i(w-z)}\langle T(w)\phi(x)\Phi_1(x_1)\ldots\Phi_N(x_N)\rangle\\
&= -\sum_{i=1}^{N}\oint_{C_i}\frac{dw}{2\pi i(w-z)}\left(\frac{\Delta_i}{(w-z_i)^2} + \frac{1}{w-z_i}\frac{\partial}{\partial z_i}\right)\langle\phi(x)\Phi_1(x_1)\ldots\Phi_N(x_N)\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\Delta_i}{(z-z_i)^2} + \frac{1}{z-z_i}\frac{\partial}{\partial z_i}\right)\langle\phi(x)\Phi_1(x_1)\ldots\Phi_N(x_N)\rangle
\end{aligned}$$

Мы видим, что существование нуль-вектора приводит к дифференциальному уравнению для корреляционной функции:

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{2(2\Delta+1)}{3}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\Delta_i}{(z-z_i)^2} + \frac{1}{z-z_i}\frac{\partial}{\partial z_i}\right)\right\}\langle\phi(x)\Phi_1(x_1)\ldots\Phi_N(x_N)\rangle = 0 \tag{2}$$

Давайте воспользуемся этим дифференциальным уравнением, чтобы найти операторные разложения первичных полей. Пусть $z \to z_i$. В этом пределе уравнение примет вид

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{2(2\Delta+1)}{3}\left(\frac{\Delta_i}{(z-z_i)^2} + \frac{1}{z-z_i}\frac{\partial}{\partial z_i}\right)\right\}\phi(x)\Phi_i(x_i) = 0$$

Будем решать уравнение в виде $(z-z_i)^{-\lambda}$. Тогда мы получим уравнение на λ:

$$\lambda(\lambda+1) = \frac{2(2\Delta+1)}{3}(\Delta_i + \lambda).$$

У нас есть два решения:
$$\lambda_\pm = \frac{4\Delta-1}{6} \pm \sqrt{\frac{(4\Delta-1)^2}{36}+\frac{2\Delta_i(2\Delta+1)}{3}}.$$
Прежде чем интерпретировать это решение, введем удобную параметризацию. Положим
$$c = 1-12\alpha_0, \qquad \alpha_\pm = \alpha_0 \pm \sqrt{\alpha_0^2+2}. \tag{3}$$
Конформные размерности Δ_i запишем в виде
$$\Delta_i = \Delta(\alpha_i) = \frac{1}{2}\alpha_i(\alpha_i-2\alpha_0), \qquad \Delta = \frac{1}{2}\alpha(\alpha-2\alpha_0).$$
Тогда решение уравнения для Δ имеет простой вид
$$\alpha = -\frac{1}{2}\alpha_\pm.$$
Тогда
$$\lambda = \Delta+\Delta_i-\Delta_i',$$
причем
$$\alpha'_{i\pm} = \alpha_i \pm \alpha. \tag{4}$$
Это значит, что в операторное разложение $\phi(x)\Phi_i(x_i)$ входят слагаемые, пропорциональные
$$z^{\Delta+\Delta_i-\Delta'_{i\pm}}\Phi'_{i\pm}(x_i),$$
где Φ_i' — поля размерности $\Delta'_{i\pm}$. Символически это можно записать так:
$$[\phi]\cdot[\Phi] \sim [\Phi_+]+[\Phi_-]. \tag{5}$$

Рассмотрим более подробно случай свободного фермиона $c=1/2$ ($\alpha_0 = 1/2\sqrt{6}$, $\alpha_+ = 2\sqrt{2/3}$, $\alpha_- = -\sqrt{3/2}$, $\Delta(-\frac{1}{2}\alpha_+) = 1/2$, $\Delta(-\frac{1}{2}\alpha_-) = 1/16$). Мы знаем, что в теории есть поля ψ размерности $(1/2,0)$ и $\bar\psi$ размерности $(0,1/2)$. В операторном разложении $\psi(z')\psi(z)$ согласно (5), (4) могут возникнуть поля размерностей $(0,0)$ и $(5/3,0)$. Поле размерности 0 действительно присутствует. Поле размерности $(5/3,0)$ выпадает. В операторном разложении $\psi(z')\bar\psi(\bar z)$ может быть первичное поле только размерности $(1/2,1/2)$ (поле $\varepsilon=\psi\bar\psi$), так как поле $\bar\psi$ удовлетворяет уравнению $\partial\bar\psi=0$, имеющему только одно решение — константу по z.

Пусть теперь $\sigma(x)$ — поле размерности $1/16$, которое тоже удовлетворяет уравнению второго порядка. Рассмотрим операторное произведение $\psi(z')\sigma(x)$. Если мы примем ψ за ϕ, а σ за Φ, то мы получим, что в этом операторном произведении могут быть первичные поля размерности $1/16$ и $35/48$. Если мы наоборот примем ψ за Φ, а σ за ϕ, то получим, что допустимы размерности $1/16$ и $63/48$. Это значит, что в операторном произведении может возникнуть только поле размерности $1/16$. Обозначим это поле через $\mu(x)$. Итак, мы получили операторное разложение
$$\psi(z')\sigma(x) \sim (z'-z)^{-1/2}(\mu(x)+O(z'-z)).$$
Отметим, что это значит, что поля ψ и σ не взаимно-локальны. При обходе z' вокруг z по замкнутому контуру знак операторного произведения (и соответствующих корреляционных функций) меняется. В пространстве Минковского это значит, что если поля $\psi(x'^1)$ и $\sigma(x^1)$ (взятые в один и тот же момент времени) коммутируют, скажем, при $x'^1 < x^1$, то они антикоммутируют при $x'^1 > x^1$. Однако если положить
$$\bar\psi(\bar z')\mu(x) \sim (\bar z'-\bar z)^{-1/2}(\sigma(x)+O(\bar z'-\bar z)),$$

то $\sigma(x)$ и $\mu(x)$ будут бесспиновыми полями размерности $(1/16, 1/16)$, каждое из которых взаимно-локально с $\varepsilon(x)$. Рассмотрим произведение $\sigma(x_1)\psi(z_2)\sigma(x_3)$. Если x_1 обходит вокруг x_2 и x_3, то произведение меняет знак. Но последние два оператора дают $\mu(x)$ в операторном произведении. Это значит, что $\sigma(x)$ и $\mu(x)$ не взаимно-локальны. Естественно предположить операторную алгебру

$$\psi(z')\sigma(x) = C(z'-z)^{-1/2}\mu(x) + O((z'-z)^{1/2}), \tag{6a}$$
$$\bar{\psi}(\bar{z}')\sigma(x) = C^*(\bar{z}'-\bar{z})^{-1/2}\mu(x) + O((\bar{z}'-\bar{z})^{1/2}), \tag{6b}$$
$$\psi(z')\mu(x) = C'(z'-z)^{-1/2}\sigma(x) + O((z'-z)^{1/2}), \tag{6c}$$
$$\bar{\psi}(\bar{z}')\mu(x) = C'^*(\bar{z}'-\bar{z})^{-1/2}\sigma(x) + O((\bar{z}'-\bar{z})^{1/2}), \tag{6d}$$
$$\sigma(x')\sigma(x) = C_1|x'-x|^{-1/4} + C_2|x'-x|^{3/4}\varepsilon(x) + O((z'-z)^{7/8}, (\bar{z}'-\bar{z})^{7/8}), \tag{6e}$$
$$\begin{aligned}\mu(x')\sigma(x) = {} & C_3(z'-z)^{3/8}(\bar{z}'-\bar{z})^{-1/8}\psi(z) \\ & + C_4(z'-z)^{-1/8}(\bar{z}'-\bar{z})^{3/8}\bar{\psi}(\bar{z}) + O((z'-z)^{7/8}, (\bar{z}'-\bar{z})^{7/8}),\end{aligned} \tag{6f}$$
$$\mu(x')\mu(x) = C_1'|x'-x|^{-1/4} + C_2'|x'-x|^{3/4}\varepsilon(x) + O((z'-z)^{7/8}, (\bar{z}'-\bar{z})^{7/8}), \tag{6g}$$

Коэффициенты C, C', C_1, ... называются *структурными константами* теории (ниже мы дадим более аккуратное и общее определение структурных констант). Вычисление структурных констант составляет основное содержание конформной теории поля.

Прежде всего, найдем рецепт вычисления первых производных от четырехточечных корреляционных функций для $z_1 = 0$, $z_2 = z$, $z_3 = 1$, $z_4 = \infty$. Вообще говоря, из Мебиус-инвариантности имеем для произвольной корреляционной функции G:

$$\sum \partial_i G = 0, \qquad \sum (z_i\partial_i + \Delta_i)G = 0, \qquad \sum (z_i^2\partial_i + 2\Delta_i z_i)G = 0.$$

Подставляя сюда $z_1 = 0$, $z_2 = z$, $z_3 = 1$, $z_4 = Z$, получим

$$\begin{aligned}(\partial_1 + \partial_2 + \partial_3 + \partial_4)G &= 0,\\ (z\partial_2 + \partial_3 + Z\partial_4)G &= -(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4)G,\\ (z^2\partial_2 + \partial_3 + Z^2\partial_4)G &= -(2z\Delta_2 + 2\Delta_3 + 2Z\Delta_4)G.\end{aligned}$$

Из второго уравнения видим, что в ведущем порядке $Z\partial_4 G = -2\Delta_4 G$. После этого остальные уравнения легко решить в пределе $Z \to \infty$:

$$\begin{aligned}&\partial_1 G = -(1-z)\partial G + (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_4)G,\\ &\partial_3 G = -z\partial G - (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_4)G,\\ &\partial_4 G = 0.\end{aligned}$$

Вооружившись этим приемом, обратимся к четырехточечным корреляционным функциям.

Рассмотрим четырехточечную корреляционную функцию

$$\langle\sigma(x_4)\sigma(x_3)\sigma(x_2)\sigma(x_1)\rangle = \left(\frac{|x_1-x_2|\cdot|x_3-x_4|}{|x_1-x_3|\cdot|x_2-x_4|}\right)^{1/4} Y(z,\bar{z}),$$

где

$$z = \frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}.$$

Уравнение второго порядка на эту функцию имеет вид

$$\left(\frac{4}{3}\frac{d^2}{dz^2} - \frac{1}{16}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}\right)\frac{d}{dz}\right)Y(z,\bar{z}) = 0.$$

Имеется такое же уравнение по $\bar{z}$. Забудем временно о $\bar{z}$. Будем искать аналитическое решение этого уравнения $F(z)$. Исключим сингулярности в точках $x=0$ и $x=1$ заменой

$$F(z) = z^{-1/8}(1-z)^{-1/8}u(z).$$

Уравнение примет вид

$$z(1-z)u'' + (\tfrac{1}{2} - x)u' + \tfrac{1}{16}u = 0.$$

Это частный случай гипергеометрического уравнения. В данном частном случае его можно решить с помощью замены переменных:

$$\left(\frac{d^2}{d\theta^2} + \frac{1}{4}\right)u(z) = 0, \qquad z = \sin^2\theta.$$

Имеется два линейно-независимых решения

$$\begin{aligned} F_1(z) &= z^{-1/8}(1-z)^{-1/8}\cos\tfrac{1}{2}\theta, \\ F_2(z) &= z^{-1/8}(1-z)^{-1/8}\sin\tfrac{1}{2}\theta. \end{aligned}$$

В пределе $z \to 0$ имеем

$$\begin{aligned} F_1(z) &= z^{-1/8}(1+O(z)), \\ F_2(z) &= \tfrac{1}{2}z^{3/8}(1+O(z)). \end{aligned} \tag{7}$$

Найдем решение $Y(z,\bar{z})$ такое, что при обходе x вокруг точки 0 функция остается однозначной. Это решение имеет вид

$$Y(z,\bar{z}) = X_1F_1(z)\overline{F_1(z)} + X_2F_2(z)\overline{F_2(z)}. \tag{8}$$

Решение все еще зависит от двух произвольных постоянных X_1 и X_2. Очевидно, что $Y(1-z,1-\bar{z})$ удовлетворяет тому же уравнению. Выразим решения $F_i(z)$ через $F_i(1-z)$. При $z \to 1$ имеем

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \frac{(1-z)^{-1/8}}{\sqrt{2}} - \frac{(1-z)^{3/8}}{2\sqrt{2}} + O((1-z)^{7/8}), \\ F_2(z) &= \frac{(1-z)^{-1/8}}{\sqrt{2}} + \frac{(1-z)^{3/8}}{2\sqrt{2}} + O((1-z)^{7/8}). \end{aligned}$$

Сравнивая с (7), получаем

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(F_1(1-z) + F_2(1-z)), \\ F_2(z) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(F_1(1-z) - F_2(1-z)). \end{aligned} \tag{9}$$

Подставим это в (8):

$$\begin{aligned} Y(z,\bar{z}) = {} & \frac{X_1+X_2}{2}F_1(1-z)\overline{F_1(1-z)} + \frac{X_1+X_2}{2}F_2(1-z)\overline{F_2(1-z)} \\ & + \frac{X_1-X_2}{2}F_1(1-z)\overline{F_2(1-z)} + \frac{X_1-X_2}{2}F_2(1-z)\overline{F_1(1-z)}. \end{aligned} \tag{10}$$

Чтобы корреляционная функция была однозначна по отношению к обходу z вокруг 1, необходимо, чтобы последние два члена равнялись нулю. Следовательно, $X_2 = X_1$. Кроме того, нормируем $\sigma(x)$ условием

$$\langle\sigma(x')\sigma(x)\rangle = \frac{1}{|x'-x|^{1/4}}.$$

Отсюда $X_1 = 1$. Итак

$$Y(z,\bar{z}) = |F_1(z)|^2 + |F_2(z)|^2 = |F_1(1-z)|^2 + |F_2(1-z)|^2 = |z(1-z)|^{-1/4}\cos\tfrac{1}{2}(\theta-\bar{\theta}). \tag{11}$$

Рассмотрим опять предел $z \to 0$. Из (7) и (11) получаем

$$Y(z, \bar{z}) = |x|^{-1/4} + \frac{1}{4}|x|^{3/4} + \cdots.$$

Чтобы понять смысл этого разложения, запишем[a]

$$\begin{aligned}\langle \sigma(\infty,\infty)\sigma(1,1)\sigma(z,\bar{z})\sigma(0,0)\rangle &\simeq \langle (C_1 + C_2\varepsilon(\infty,\infty))(C_1|x|^{-1/4} + C_2|x|^{3/4}\varepsilon(0,0))\rangle \\ &= C_1^2|x|^{1/4} + C_2^2|x|^{3/4}\langle\varepsilon(\infty,\infty)\varepsilon(0,0)\rangle \\ &= C_1^2|x|^{1/4} + C_2^2|x|^{3/4},\end{aligned}$$

Отсюда $C_1 = 1$, $C_2 = 1/2$.

Теперь рассмотрим корреляционную функцию

$$\langle \mu(x_4)\mu(x_3)\sigma(x_2)\sigma(x_1)\rangle = (|x_1 - x_3| \cdot |x_2 - x_4|)^{-1/4}\tilde{Y}(z, \bar{z}).$$

Поскольку $\mu(x)$ имеет ту же размерность, что и $\sigma(x)$, функция $\tilde{Y}(z,\bar{z})$ удовлетворяет тому же уравнению, что и $Y(z,\bar{z})$. Это значит, что она выражается через те же самые решения $F_i(z)$. Однако $\tilde{Y}$ должна быть однозначной при обходе вокруг 0 менять знак при обходе z вокруг 1. Первое условие выполняется тем же способом:

$$\tilde{Y}(z,\bar{z}) = \tilde{X}_1 F_1(z)\overline{F_1(z)} + \tilde{X}_2 F_2(z)\overline{F_2(z)}. \tag{12}$$

Чтобы выполнить второе условие, надо потребовать, чтобы в (10) занулялись первые два слагаемых, а не последние. Это значит, что $\tilde{X}_2 = -\tilde{X}_1$. Та же нормировка дает $\tilde{X}_1 = 1$. Отсюда

$$\tilde{Y}(z,\bar{z}) = |F_1(z)|^2 - |F_2(z)|^2 = F_1(1-z)\overline{F_2(1-z)} + F_2(1-z)\overline{F_1(1-z)} = |x(1-x)|^{-1/4}\cos\tfrac{1}{2}(\theta+\bar{\theta}), \tag{13}$$

В пределе $z \to 0$

$$\tilde{Y}(z,\bar{z}) = |z|^{-1/4} - \frac{1}{4}|z|^{3/4} + \cdots$$

и мы получаем $C_1' = 1 = C_1$, $C_2' = -C_2 = -1/2$. В пределе $z \to 1$ имеем

$$\tilde{Y}(z,\bar{z}) = \tfrac{1}{2}(1-z)^{-1/8}(1-\bar{z})^{3/8} + \tfrac{1}{2}(1-z)^{3/8}(1-\bar{z})^{-1/8} + \cdots.$$

Сравнивая с

$$\begin{aligned}\langle \mu(\infty,\infty)\mu(1,1)\sigma(z,\bar{z})\sigma(0,0)\rangle &\simeq \langle (C_3\psi(\infty) + C_4\bar{\psi}(\infty)) \\ &\quad \times (C_3(1-z)^{3/8}(1-\bar{z})^{-1/8}\psi(1) + C_4(1-z)^{-1/8}(1-\bar{z})^{3/8}\bar{\psi}(1))\rangle \\ &= C_3^2(1-z)^{3/8}(1-\bar{z})^{-1/8}\langle\psi(\infty)\psi(1)\rangle \\ &\quad + C_4^2(1-z)^{-1/8}(1-\bar{z})^{3/8}\langle\bar{\psi}(\infty)\bar{\psi}(1)\rangle \\ &= C_3^2(1-z)^{3/8}(1-\bar{z})^{-1/8} - C_4^2(1-z)^{-1/8}(1-\bar{z})^{3/8},\end{aligned}$$

получаем $C_3 = 1/\sqrt{2}$, $C_4 = i/\sqrt{2}$.

Чтобы найти все структурные константы, осталось вычислить корреляционные функции

$$\begin{aligned}G(z) &= \langle\sigma(\infty,\infty)\psi(1)\psi(z)\sigma(0,0)\rangle, \\ G'(z) &= \langle\mu(\infty,\infty)\psi(1)\psi(z)\mu(0,0)\rangle.\end{aligned}$$

Наличие в каждом корреляторе двух полей разной размерности приводит к двум уравнениям второго порядка. Если сложить их с подходящими коэффициентами, то вторые производные сократятся и получится одно уравнение первого порядка. Выводить такое уравнение довольно громоздко, поэтому мы

[a] По определению $\phi(\infty,\infty) = \lim_{Z\to\infty} Z^{2\Delta}\bar{Z}^{2\bar{\Delta}}\sigma(Z,\bar{Z})$. При выводе формулы надо использовать инверсию.

найдем эти корреляторы более простым способом. Давайте рассмотрим сначала обычный коррелятор $\langle\psi(z')\psi(z)\rangle$. Давайте разложим $\psi(z)$ по целым степеням z:

$$\psi(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}+\frac{1}{2}} b_n z^{-n-1/2}, \qquad \{b_m, b_n\} = \delta_{m+n,0}.$$

Введем вакуум $|0\rangle$ условием

$$b_n|0\rangle = 0 \quad (n > 0).$$

Тогда

$$\langle 0|\psi(z')\psi(z)|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} z^n z'^{-n-1} = \frac{1}{z'-z}.$$

Теперь мы хотим рассмотреть вакуум $|\sigma\rangle$, порожденный оператором $\sigma(0)$, т. е. такой, при обходе вокруг которого знак фермиона меняется. Для этого надо разложить фермион по полуцелым степеням z:

$$\psi(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n z^{-n-1/2}, \qquad \{c_m, c_n\} = \delta_{m+n,0}.$$

Потребуем, чтобы

$$c_n|\sigma\rangle = 0 \quad (n > 0).$$

Учитывая, что $c_0^2 = \frac{1}{2}\{c_0, c_0\} = \frac{1}{2}$, получаем

$$\langle\sigma|\psi(z')\psi(z)|\sigma\rangle = \frac{1}{2(zz')^{1/2}} + \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1/2} z'^{-n-1/2} = \frac{1}{2}\frac{1}{(zz')^{1/2}}\frac{z'+z}{z'-z}.$$

Очевидно, что

$$G(z) = \langle\sigma|\psi(1)\psi(z)|\sigma\rangle = \frac{1}{2z^{1/2}}\frac{1+z}{1-z}. \tag{14}$$

Отсюда $C = 1/\sqrt{2}$. Отсюда $|\mu\rangle = \sqrt{2}c_0|\sigma\rangle$ и $G'(z) = G(z)$, $C' = C$.

Подытожим все сказанное. Теорию свободного фермиона можно описать тремя наборами взаимнолокальных полей. Первый набор — фермионный набор $(1, \psi, \bar\psi, \varepsilon)$ и их потомки (соответствующие вторичные поля, порождаемые операторами $\mathcal{L}_n$):

$$\begin{aligned}
\psi(z')\psi(z) &= \frac{1}{z'-z} + 2T(z) + O(z'-z),\\
\bar\psi(z')\bar\psi(\bar z) &= -\frac{1}{\bar z'-\bar z} - 2\bar T(\bar z) + O(z'-z),\\
\psi(z')\bar\psi(\bar z) &= \varepsilon(z,\bar z) + O(1),\\
\psi(z')\varepsilon(z,\bar z) &= \frac{\bar\psi(\bar z)}{z'-z} + O(1),\\
\bar\psi(\bar z')\varepsilon(z,\bar z) &= \frac{\psi(z)}{\bar z'-\bar z} + O(1),\\
\varepsilon(z',\bar z')\varepsilon(z,\bar z) &= \frac{1}{|z'-z|^2} + 2T(z) + 2\bar T(\bar z) + O(z'-z, \bar z'-\bar z).
\end{aligned} \tag{15}$$

В первых двух и в последней строчках для полноты картины выписаны сублидирующие члены, содержащие тензор энергии-импульса. Другой набор, связанный с параметром порядка модели Изинга, имеет вид $(1, \sigma, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
\sigma(z',\bar z')\sigma(z,\bar z) &= \frac{1}{|z'-z|^{1/4}} + \frac{1}{2}|z'-z|^{3/4}\varepsilon(z,\bar z) + O(1),\\
\varepsilon(z',\bar z')\varepsilon(z,\bar z) &= \frac{1}{|z'-z|^2} + O(1),\\
\varepsilon(z',\bar z')\sigma(z,\bar z) &= \frac{1/2}{|z'-z|}\sigma(z,\bar z) + O(1).
\end{aligned} \tag{16}$$

Третий набор $(1, \mu, \varepsilon)$ содержит параметр беспорядка модели Изинга. Его операторные разложения совершенно аналогичны и получаются заменой $\sigma \to \mu$, $\varepsilon \to -\varepsilon$. Каждый из этих наборов вполне описывает модель.

Здесь выписаны только операторные разложения для первичных полей, поскольку операторные разложения их потомков однозначно определены этими разложениями и разложениями с тензором энергии-импульса.

Эти три набора устанавливают эквивалентность между моделью свободных фермионов и моделью Изинга в критической точке в скейлинговом пределе. Вне критической точки эти наборы дают различное описание в терминах частиц. Например, выше критической точки поле σ описывает скалярные нейтральные бозоны со взаимодействием, причем матрица рассеяния факторизуется на парные амплитуды рассеяния, равные -1. Можно показать, что статистика таких бозонов в точности воспроизводит статистику Ферми. Поле μ в этом случае имеет ненулевое среднее и не допускает интерпретации в терминах частиц. На самом деле в двумерном пространстве-времени вообще нельзя говорить о бозонах и фермионах. Одни и те же возбуждения можно рассматривать и как бозоны, и как фермионы, но с различной матрицей рассеяния. В случае факторизующейся матрицы рассеяния (интегрируемые модели) парная матрица рассеяния фермионов отличается от матрицы рассеяния бозонов знаком.

Лекция 4
Кроссинг-симметрия и бозонное представление

Рассмотрим модель конформной теории поля общего вида. Пусть $\{\phi_i\}$ — набор первичных полей размерностей $(\Delta_i, \bar{\Delta}_i)$ с операторными разложениями

$$\phi_i(x')\phi_j(x) = \sum_k C_{ij}^k (z'-z)^{\Delta_k-\Delta_i-\Delta_j}(\bar{z}'-\bar{z})^{\bar{\Delta}_k-\bar{\Delta}_i-\bar{\Delta}_j}(\phi_k(x) + O(z'-z, \bar{z}'-\bar{z})). \tag{1}$$

Поймем прежде всего, как устроены члены, которые мы обозначили как $O(z'-z, \bar{z}'-\bar{z})$). Понятно, что они состоят из вирасоровских потомков поля phi_k:

$$\phi_k + \sum_{p,\bar{p}\neq 0} a_p(\Delta_i, \Delta_j; \Delta_k) a_{\bar{p}}(\bar{\Delta}_i, \bar{\Delta}_j; \bar{\Delta}_k)(z'-z)^{N(p)}(\bar{z}'-\bar{z})^{N(\bar{p})}\phi_k^{p,\bar{p}}(x),$$

где p, $\bar{p}$ нумеруют потомки по отношению к L_{-n} и $\bar{L}_{-n}$ соответственно, а $N(p)$ — уровень соответствующего потомка. Если потомки $\phi_k^{p,\bar{p}}$ как-нибудь нормировать, то коэффициенты $a_p(\Delta)$ полностью определяются алгеброй Вирасоро и, в принципе, можно вычислить. Это можно сделать, например, действуя операторами L_n $(n > 0)$ на левую и правую часть формального равенства

$$\phi_{\Delta_i}(z)|\Delta_j\rangle = \sum_p a_p z^{\Delta_k-\Delta_i-\Delta_j+N(p)} L(p)|\Delta_k\rangle$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z (здесь $L(p)$ — оператор, производящий потомок p из состояния $|\Delta_k\rangle$.

Введем двойственный базис $\{\phi^i\}$ в пространстве полей:

$$\langle\phi_i(x')\phi^j(x)\rangle = \frac{\delta_i^j}{(z'-z)^{2\Delta_i}(\bar{z}'-\bar{z})^{2\bar{\Delta}_i}}, \qquad \phi_i(x) = \sum_j g_{ij}\phi^j(x). \tag{2}$$

Очевидно, что

$$\Delta_i = \Delta^i, \text{ а } g_{ij} = 0, \text{ если } \Delta_i \neq \Delta_j.$$

Во многих теориях (например, в рассмотренной нами модели свободного фермиона $c = 1/2$) двойственное поле ϕ^i совпадает с исходным ϕ_i. Вообще говоря, такого совпадения может не быть. Например, в модели свободного бозона $c = 1$ двойственным к вершинному оператору $V_\alpha(x) = :e^{i\alpha\phi(x)}:$ является оператор $V^\alpha(x) = V_{-\alpha}(x)$.

Рассмотрим четырехточечную функцию

$$G_{ijk}{}^l(z,\bar{z}) = \langle\phi^l(\infty,\infty)\phi_k(1,1)\phi_j(z,\bar{z})\phi_i(0,0)\rangle = \langle l|\phi_k(1,1)\phi_j(z,\bar{z})|i\rangle. \tag{3}$$

Вычислим теперь операторное разложение полей j и i. Очевидно,

$$\begin{aligned}G_{ijk}{}^l(z,\bar{z}) &= \sum_{m,p,\bar{p}} C_{ji}^m a_p(j,i;m)a_{\bar{p}}(\bar{j},\bar{i};\bar{m})z^{\Delta_m-\Delta_i-\Delta_j+N(p)}\bar{z}^{\bar{\Delta}_m-\bar{\Delta}_i-\bar{\Delta}_j+N(\bar{p})}\langle l|\phi_k(1,1)|m,p\bar{p}\rangle \\ &= \sum_{m,p,\bar{p}} C_{km}^l C_{ji}^m a_p(j,i;m)a_{\bar{p}}(\bar{j},\bar{i};\bar{m})b_p(k,m;l)b_{\bar{p}}(\bar{k},\bar{m};\bar{l})z^{\Delta_m-\Delta_i-\Delta_j+N(p)}\bar{z}^{\bar{\Delta}_m-\bar{\Delta}_i-\bar{\Delta}_j+N(\bar{p})},\end{aligned}$$

где коэффициенты $b_p(\Delta_k, \Delta_m; \Delta_l)$ вычисляются непосредственно из соответствующих трехточек и тоже определяются исключительно конформной теорией. По определению, для самих первичных полей $a_0 = b_0 = 1$. Мы видим, что зависимости от z и $\bar{z}$ факторизуются (*голоморфная факторизация*):

$$G_{ijk}{}^l(z,\bar{z}) = \sum_m C_{km}^l C_{ji}^m \mathcal{F}_{ijk}{}^l(m;z)\bar{\mathcal{F}}_{ijk}{}^l(m;\bar{z}), \tag{4}$$

где функции

$$\mathcal{F}_{ijk}{}^{l}(m;z) = \sum_{p} a_p(j,i;m) b_p(k,m;l) z^{\Delta_m - \Delta_i - \Delta_j + N(p)},$$
$$\bar{\mathcal{F}}_{ijk}{}^{l}(m;\bar{z}) = \sum_{\bar{p}} a_{\bar{p}}(\bar{j},\bar{i};\bar{m}) b_p(\bar{k},\bar{m};\bar{l}) \bar{z}^{\bar{\Delta}_m - \bar{\Delta}_i - \bar{\Delta}_j + N(\bar{p})}$$

называются *конформными блоками.* На прошлой лекции мы уже встречались с конформными блоками — функциями $F_1(z)$, $2F_2(z)$. Нам удобно нормировать конформные блоки условием

$$\mathcal{F}_{ijk}{}^{l}(m;z) = z^{\Delta_m - \Delta_i - \Delta_j}(1 + O(z)).$$

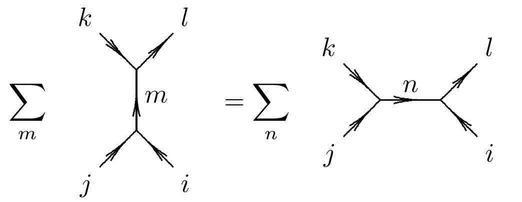
Соотношение (4) гарантирует желаемые свойства монодромии (например, однозначность) при обходе вокруг точки $z = 0$, т. е. желаемые свойства взаимной локальности полей ϕ_i и ϕ_j. Каковы же свойства монодромии при обходе вокруг точки $z = 1$? Давайте рассмотрим для этого операторное разложение ϕ_k и ϕ_j. В этом случае аналогично получим

$$G_{ijk}{}^{l}(z,\bar{z}) = s_{ij} s_{ik} s_{jk} \sum_{m} C_{jk}^{m} C_{mi}^{l} \mathcal{F}_{jki}{}^{l}(m; 1-z) \bar{\mathcal{F}}_{jki}{}^{l}(m; 1-\bar{z}), \tag{5}$$

где мы воспользовались преобразованием $z \to 1 - z$, а s_{ij} — множитель, равный по модулю 1, определяемый соотношением $\phi_i \phi_j = s_{ij} \phi_j \phi_i$. Соотношения (4) и (5) дают важное тождество, называемое *соотношением кроссинг-инвариантности* Белавина, Полякова и Замолодчикова (1983):

$$\sum_{m} C_{km}^{l} C_{ji}^{m} \mathcal{F}_{ijk}{}^{l}(m;z) \bar{\mathcal{F}}_{ijk}{}^{l}(m;\bar{z}) = s_{ij} s_{ik} s_{jk} \sum_{n} C_{jk}^{n} C_{ni}^{l} \mathcal{F}_{jki}{}^{l}(n; 1-z) \bar{\mathcal{F}}_{jki}{}^{l}(n; 1-\bar{z}) \tag{6}$$

Графически его можно изобразить следующим образом



Если мы знаем конформные блоки, мы можем найти структурные константы C_{ijk}. Действительно, из кроссинг-симметрии следует, что конформные блоки в s-канале являются линейными комбинациями конформных блоков в t-канале:

$$\mathcal{F}_{ijk}{}^{l}(m;z) = \sum_{n} \alpha_{ijk}{}^{l}(m,n) \mathcal{F}_{kji}{}^{l}(n; 1-z). \tag{7}$$

Коэффициенты $\alpha(m,n)$ обычно можно найти, вычисляя разложение конформных блоков $\mathcal{F}_{ijk}{}^{l}(m;z)$ вблизи точки $z = 1$. Подставим (7) в (4):

$$G_{ijk}{}^{l}(z,\bar{z}) = \sum_{m,n,n'} C_{km}^{l} C_{ji}^{m} \alpha_{ijk}{}^{l}(m,n) \bar{\alpha}_{ijk}{}^{l}(m,n') \mathcal{F}_{kji}{}^{l}(n; 1-z) \bar{\mathcal{F}}_{kji}{}^{l}(n', 1-\bar{z}).$$

Из совместимости этого разложения с (5) следует, что

$$\sum_{m} C_{km}^{l} C_{ji}^{m} \alpha_{ijk}{}^{l}(m,n) \bar{\alpha}_{ijk}{}^{l}(m,n') = \delta_{nn'} s_{ij} s_{ik} s_{jk} C_{in}^{l} C_{jk}^{n}. \tag{8}$$

Совместно с условиями нормировки

$$C_{i0}^{j} = \delta_i^j \quad (\phi_0(x) = 1) \tag{9}$$

и требованием, чтобы $C_{ijk} = \sum_{k'} g_{kk'} C_{ij}^{k'}$ удовлетворял свойству симметрии

$$C_{ijk} = s_{ij} C_{jik} = s_{jk} C_{ikj},$$

эти уравнения определяют структурные константы. Вообще говоря, решения этих уравнений могут быть не единственны. Однако во многих интересных случаях они единственны или их немного.

Рассмотрим теперь конформные блоки теории при $c < 1$. В этом случае модуль Верма алгебры Вирасоро содержит нуль-вектор на уровне mn, если

$$\Delta = \Delta_{mn} = \frac{1}{2}\alpha_{mn}(\alpha_{mn} - 2\alpha_0), \qquad \alpha_{mn} = \frac{1-m}{2}\alpha_+ + \frac{1-n}{2}\alpha_- \tag{10}$$

(*формула Каца*). Это значит, что конформные блоки соответствующих полей представляют собой решения систем дифференциальных уравнений, а промежуточный канал нумерует эти решения. Сейчас мы построим эти решения явно.

Есть простой способ построить алгебру Вирасоро с $c < 1$. Давайте возьмем свободный бозон, точнее его «голоморфную часть» $\varphi(z)$ с корреляционной функцией

$$\langle \varphi(z')\varphi(z) \rangle = \log \frac{R}{z' - z}.$$

В принципе мы знаем, что к тензору-энергии импульса можно прибавлять полную производную, хотя это и может повлиять на граничные условия. Рассмотрим такой тензор энергии-импульса

$$T(z) = -\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + i\alpha_0 \partial^2 \varphi. \tag{11}$$

Вычислив операторное разложение $T(z')T(z)$, мы получим, что центральный заряд изменился под действием дополнительного члена и стал равным

$$c = 1 - 12\alpha_0^2. \tag{12}$$

Можно также вычислить операторные разложения $T(z')V_\alpha(z)$, где

$$V_\alpha(z) = :e^{i\alpha\varphi(z)}:. \tag{13}$$

Мы получим, что такой вершинный оператор имеет конформную размерность

$$\Delta_\alpha = \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 2\alpha_0). \tag{14}$$

Однако это вступает в противоречие с условием, что $\langle V_\alpha(z')V_\beta(z) \rangle$ отлично от нуля только при $\beta = -\alpha$, так как $\Delta_{-\alpha} \neq \Delta_\alpha$. Иными словами, теория не замыкается на сферу — имеется особенность в точке $z = \infty$. Заметим, что теперь

$$\Delta_\alpha = \Delta_{2\alpha_0 - \alpha}. \tag{15}$$

т. е.

$$V^\alpha(z) = V_{2\alpha_0 - \alpha}(z). \tag{16}$$

Чтобы преодолеть эту трудность можно переопределить вакуумное состояние на бесконечности. Именно, потребовать, чтобы

$$\langle 0, \alpha_0 | = \lim_{z \to \infty} \langle 0 | V_{-2\alpha_0}(z) z^{4\alpha_0^2} \tag{17}$$

и положить $\langle X \rangle = \langle 0, \alpha_0 | X | 0 \rangle$. Тогда

$$\langle V_{\alpha_N}(z_N) \ldots V_{\alpha_1}(z_1) \rangle = \begin{cases} \prod_{i<j}(z_j - z_i)^{\alpha_i \alpha_j}, & \text{если } \sum \alpha_i = 2\alpha_0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{18}$$

В частности

$$\langle V_{2\alpha_0-\alpha}(z')V_\alpha(z)\rangle = \frac{1}{(z'-z)^{2\Delta_\alpha}}.$$

Среди вершинных операторов можно выделить несколько специальных полей. Во-первых, это «сопряженная единица» $V_{2\alpha_0}(z)$. Это оператор нулевой размерности. Во-вторых, имеется два оператора $V_\pm(z) = V_{\alpha_\pm}(z)$ размерности 1. Удобно рассмотреть интегралы от этих полей по некоторым контурам (*экранирующие операторы*

$$S_\pm = \int \frac{dz}{2\pi i} V_\pm(z). \tag{19}$$

Интегралы по замкнутым контурам коммутируют с алгеброй Вирасоро:

$$[L_n, \oint \frac{dw}{2\pi i}\, V_\pm(w)] = \oint \frac{dw}{2\pi i}\, [L_n, V_\pm(w)] = \oint \frac{dw}{2\pi i}\, \partial(z^{n+1}V_\pm(w)) = 0$$

Трудность состоит в том, что устроить замкнутый контур довольно сложно. Давайте рассмотрим состояния $|\alpha\rangle = V_\alpha(0)|0\rangle$ и фоковские модули над ними. Давайте выясним, когда интеграл по окружности $\int_{z_0}^{z_0e^{2\pi i}} \frac{dz}{2\pi i}\, V_-(z)|\alpha\rangle$ является интегралом по замкнутому контуру, т. е. не зависит от начальной точки z_0:

$$\begin{aligned}\int_{z_0}^{z_0e^{2\pi i}} \frac{dz}{2\pi i}\, V_-(z)|\alpha\rangle &= \int_{z_0}^{z_0e^{2\pi i}} \frac{dz}{2\pi i}\, V_-(z)V_\alpha(0)|0\rangle \\ &= \int_{z_0}^{z_0e^{2\pi i}} \frac{dz}{2\pi i}\, z^{\alpha\alpha_-} : V_-(z)V_\alpha(0) : |0\rangle \\ &= \int_{z_0}^{z_0e^{2\pi i}} \frac{dz}{2\pi i}\, z^{\alpha\alpha_-}(V_{\alpha+\alpha_-}(0) + O(z))|0\rangle. \end{aligned} \tag{20}$$

Очевидно, это так, когда $\alpha\alpha_- = m-1 \in \mathbf{Z}$. Так как $\alpha_+\alpha_- = -2$, имеем $\alpha = \frac{1-m}{2}\alpha_+ = \alpha_{m1}$, т. е. когда модуль Верма имеет нуль-вектор на уровне m. Легко проверить, что интеграл (20) равен нулю при $m > 0$. Однако он не обязан быть равным нулю на всем фоковском модуле. Рассмотрим простейший случай $m = 1$ или $\alpha = 0$. Тогда первые векторы в фоковском модуле — это $|0\rangle$ и $a_{-1}|0\rangle = \partial\varphi(0)|0\rangle$. Посмотрим, как действует на них S_-. Фоковский модуль не имеет структуры модуля Верма, поскольку $L_{-n}|0\rangle = 0$. В то же время вектор $a_{-1}|0\rangle$ находится как раз на уровне 1 и удовлетворяет соотношению $L_1a_{-1}|0\rangle \sim |0\rangle$. Так или иначе, он должен выпадать из спектра физических операторов. Посмотрим как на него действует экранирующий оператор: $S_-a_{-1}|0\rangle \sim |\alpha_-\rangle \neq 0$. Оказывается, на фоковских модулях $\mathcal{F}_{m1}$ физические векторы удовлетворяют условию $S_-|v\rangle = 0$.

Обобщим эту конструкцию. Рассмотрим операторы

$$Q_\pm^{(n)}(z_0) = \int_{z_0}^{z_0e^{2\pi i}} \frac{dz_1}{2\pi i} \int_{z_1}^{z_1e^{2\pi i}} \frac{dz_2}{2\pi i} \dots \int_{z_1}^{z_1e^{2\pi i}} \frac{dz_n}{2\pi i} V_\pm(z_1)V_\pm(z_2)\dots V_\pm(z_n).$$

Эти операторы не зависят от z_0, действуя на фоковское пространство $\mathcal{F}_\alpha$, если $\alpha_\pm\big(n\alpha + \frac{1}{2}n(n-1)\alpha_\pm\big)$ — целое число. Легко проверить, что это имеет место на модулях с $\alpha = \alpha_{mn}$ для $Q_-^{(n)}$ и $Q_+^{(m)}$, причем при $m, n > 0$ эти операторы действуют нулем на старших векторах. Можно нарисовать такую коммутативную (с точностью до множителей) диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{-m\,n} & \xleftarrow{Q_+^{(m)}} & \mathcal{F}_{mn} \\ \big\downarrow Q_-^{(n)} & & \big\downarrow Q_-^{(n)} \\ \mathcal{F}_{-m\,-n} & \xleftarrow{Q_+^{(m)}} & \mathcal{F}_{m\,-n} \end{array}$$

Обратим внимание на то, что $V_{-m\,-n}(z)=V^{mn}(z)$. В модуле $\mathcal{F}_{-m\,-n}$ $(m,n>0)$ имеется нуль-вектор, равный $Q_-^{(n)}|\alpha_{-m\,n}\rangle$. Действительно,

$$L_kQ_-^{(n)}|\alpha_{-m\,n}\rangle=Q_-^{(n)}L_k|\alpha_{-m\,n}\rangle=0.$$

Поэтому в модуле $\mathcal{F}_{-m\,-n}$ следует считать равными векторы, разность которых есть действие $Q_-^{(n)}$ на какой-то вектор. Иными словами в точках общего положения по c имеем для неприводимого модуля алгебры Вирасоро $(m,n>0)$

$$\mathcal{H}^{\rm Vir}_{m,n}\simeq \mathrm{Ker}_{\mathcal{F}_{mn}}\,Q_-^{(n)}\simeq \mathcal{F}_{-m\,-n}/\,\mathrm{Im}_{\mathcal{F}_{-m\,n}}\,Q_-^{(n)}.$$

Давайте теперь рассмотрим произведение

$$V_{m_2n_2}(z)Q_+^{(k)}(z)Q_-^{(l)}(z)V_{m_1n_1}(0)$$

Если z мало, то издалека этот оператор выглядит как потомок поля $V_{\alpha'}(0)$ с $\alpha'=\alpha_{m_1n_1}+\alpha_{m_2n_2}-k\alpha_+-l\alpha_-$, т. е. $V_{m'n'}(0)$ с

$$\begin{aligned}m'&=m_1+m_2-1-2k,\\ n'&=n_1+n_2-1-2l.\end{aligned}\tag{21}$$

Очевидно, что $k<m_1$, $l<n_1$. Некоторая манипуляция с контурами дает возможность увидеть, что $k<m_2$, $l<n_2$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}|m_1-m_2|+1\le m'\le m_1+m_2-1,&\quad m_1+m_2-1-m'\in 2\mathbf{Z},\\ |n_1-n_2|+1\le n'\le n_1+n_2-1,&\quad n_1+n_2-1-n'\in 2\mathbf{Z}.\end{aligned}\tag{22}$$

Теперь сделаем основное утверждение. Конформные блоки модели с $c<1$ имеют вид (Фейгин, Фукс, 1983)

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}_{m_1n_1,m_2n_2,m_3n_3}{}^{m_4n_4}(m,n;z)\\ &\quad=(A^{mn}_{m_1n_1,m_2n_2}A^{m_4n_4}_{mn,m_3n_3})^{-1}\\ &\qquad\times\langle V_{-m_4\,-n_4}(\infty)V_{m_3n_3}(1)Q_+^{(K-k)}(1)Q_-^{(L-l)}(1)V_{m_2n_2}(z)Q_+^{(k)}(z)Q_-^{(l)}(z)V_{m_1n_1}(0)\rangle,\\ &\qquad K=\tfrac12(m_1+m_2+m_3-m_4)-1,\quad k=\tfrac12(m_1+m_2-m-1),\\ &\qquad L=\tfrac12(n_1+n_2+n_3-n_4)-1,\qquad l=\tfrac12(n_1+n_2-n-1),\\ &\qquad\qquad A^{mn}_{m_1n_1,m_2n_2}=\langle V(\infty)V(1)Q_+^{(k)}(1)Q_-^{l}(1)V(0)\rangle.\end{aligned}\tag{23}$$

Действительно, легко проверить, что при $z\to 0$ эти выражения имеют вид $z^{\Delta_{mn}-\Delta_{m_1n_1}-\Delta_{m_2n_2}}(1+O(z))$. С другой стороны, операторы $Q_\pm$ коммутируют с алгеброй Вирасоро и не портят конформных свойств полей. Обратите внимание, что общее число K операторов S_+ и общее число L операторов S_- не зависят от m и n. Это значит, что конформные блоки для разных промежуточных состояний различаются только выбором контуров интегрирования, но не видом подынтегрального выражения. Дело в том, что все конформные блоки являются решениями одних и тех же дифференциальных уравнений гипергеометрического типа, а интегралы (23) представляют собой интегральные представления решений этих уравнений. Теперь вычисление коэффициентов α в (7) сводится к перекручиванию контуров и вычислению трехточечных корреляционных функций. Это проделали Доценко и Фатеев в 1984 г. и, решив уравнения (8) для случая диагонального спаривания, т. е. полей $\phi_{mn}(x)$ размерностей $(\Delta_{mn},\Delta_{mn})$, нашли явно структурные константы конформных моделей.

Особый случай составляют конформные модели с центральным зарядом

$$c=1-6\frac{(q-p)^2}{pq},\qquad p,q\in\mathbf{Z},\qquad q>p>1.\tag{24}$$

В этом случае $\alpha_+/\alpha_- = q/p$ — рациональное число, поэтому

$$\alpha_{m+p\,n+q} = \alpha_{mn}$$

и

$$\Delta_{mn} = \Delta_{p-m,q-n} = \frac{(qm-pn)^2-(q-p)^2}{4pq}. \tag{25}$$

Это значит, что модуль Верма со старшим весом Δ_{mn} содержит по крайней мере два нуль-вектора: на уровне mn и на уровне $(p-m)(q-n)$. При этом размерности $\Delta_{mn}+mn$ и $\Delta_{mn}+(p-m)(q-n)$ тоже удовлетворяют формуле Каца и соответствующие подмодули имеют пару общих нуль-векторов. Их подмодули имеют тоже пару общих нуль-векторов и т. д. Эту структуру можно изобразить диаграммой:

$$\begin{array}{ccc}
 & v_0 & \\
\swarrow & & \searrow \\
u_1 & & u_1' \\
\downarrow & \swarrow\!\!\!\!\searrow & \downarrow \\
u_2 & & u_2' \\
\downarrow & \swarrow\!\!\!\!\searrow & \downarrow \\
u_3 & & u_3' \\
\downarrow & \swarrow\!\!\!\!\searrow & \downarrow \\
 & \cdots &
\end{array}$$

Заметим, что структурные константы инвариантны по отношению к замене $(m,n) \to (p-m,q-n)$ в любом из трех индексов, поскольку они зависят только от конформных размерностей. Это значит, что можно выполнить следующую редукцию: отождествить поля $\phi_{mn}(x)$ и $\phi_{p-m\,q-n}(x)$. В этом случае операторные разложения замыкаются в области

$$1 \le m \le p-1, \quad 1 \le n \le q-1. \tag{26}$$

Ниже мы будем писать первичные поля в виде таблицы:

$$\begin{array}{cccc}
\phi_{1\,q-1} & \phi_{2\,q-1} & \cdots & \phi_{p-1\,q-1} \\
\cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot \\
\phi_{1\,2} & \phi_{2\,2} & \cdots & \phi_{p-1\,2} \\
\phi_{1\,1} & \phi_{2\,1} & \cdots & \phi_{p-1\,1}
\end{array}$$

При этом правило слияния (22) меняется:

$$\begin{gathered}
|m_1-m_2|+1 \le m' \le m_1+m_2-1, 2p-m_1-m_2-1, \\
|n_1-n_2|+1 \le n' \le n_1+n_2-1, 2q-n_1-n_2-1.
\end{gathered} \tag{27}$$

Таким образом, минимальные модели содержат конечное число первичных полей $\lceil pq/2 \rceil$. Особую роль играют теории с $q=p+1$, $p \ge 2$:

$$c = 1 - \frac{6}{p(p+1)}. \tag{28}$$

Дело в том, что это унитарные теории, не содержащие полей отрицательных конформных размерностей. Нормируем состояние $|\Delta\rangle$ условием $\langle\Delta|\Delta\rangle = 1$. Тогда норма состояния $L_{-1}|\Delta\rangle$ равна

$$\langle\Delta|L_1L_{-1}|\Delta\rangle = 2\langle\Delta|L_0|\Delta\rangle = 2\Delta.$$

Таким образом, необходимым условием унитарности представления является положительность размерностей.

Унитарная теория с $p = 2$ имеет центральный заряд $c = 0$ и содержит только одно первичное поле (и вообще только одно поле) 1. Это «пустая» теория. В случае $p = 3$ центральный заряд равен $c = 1/2$ и мы имеем модель свободного фермиона. Таблица первичных полей и таблица размерностей имеют вид

$$\begin{array}{cc} \varepsilon & 1 \\ \sigma & \sigma \\ 1 & \varepsilon \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{array}$$

Следующая теория $p = 4$ имеет центральный заряд $c = 7/10$ и таблицу размерностей

$$\begin{array}{ccc} \frac{3}{2} & \frac{7}{16} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{3}{80} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{80} & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{7}{16} & \frac{3}{2} \end{array}$$

Что есть классический предел конформных теорий? Давайте перенормируем алгебру Вирасоро:

$$\tilde{L}_n = \lambda L_n.$$

Тогда

$$[\tilde{L}_m, \tilde{L}_n] = \lambda(m-n)L_{m+n} + \frac{\lambda^2 c}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0}.$$

Если $\lambda \to 0$, можно заменить коммутатор скобкой Пуассона. Однако сам по себе этот предел ничего не меняет в теории. Давайте устремим λ к нулю так, чтобы остались конечными оба члена в коммутаторе. Иными словами, пусть произведение λc в этом пределе остается конечным. Поскольку в нашем классе моделей $c < 1$, мы будем считать, что

$$c \to -\infty \tag{29}$$

и будем удерживать $\lambda c = -1$. Определим скобку Пуассона как

$$\{F, G\}_{PB} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{i}{\lambda}[F, G],$$

т. е. $\lambda = \hbar$. Тогда

$$\{\tilde{L}_m, \tilde{L}_n\}_{PB} = i(m-n)\tilde{L}_{m+n} - im(m^2-1)\delta_{m+n,0}. \tag{30}$$

Мы видим, что классический предел нельзя осуществить по унитарным моделям, для которых $c > 0$. В классическом пределе $\alpha_0 \to \infty$, так что $\alpha_+ \simeq 2\alpha_0 \to \infty$, $\alpha_- \simeq -\alpha_0^{-1} \to 0$. Поля ϕ_{mn} имеют в этом пределе размерности

$$\Delta_{mn} = \frac{|c|(m^2-1)}{24} - \frac{n-1}{2}.$$

Это значит, что состояния с $m > 1$ следует исключить из классического спектра.